Chapitre 5

Extrema liés (ou sous contraintes) et multiplicateurs de Lagrange

5.0.17 DÉFINITION
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, U ouvert d'un espace vectoriel normé E.

Soit S un sous-ensemble de E et $a \in S$. On dit que f présente un **minimum local sous contrainte S** (respectivement un **maximum local sous contrainte S** au point a s'il existe un voisinage ouvert de a, V tel que

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{(respectivement } f(a) > f(x))$$

pour tout $x \in V \cap S$.

On dit que f présente un **extremum sous la contrainte S** au point a, si la restriction de f à S présente soit un minimum local, soit un maximum local.

On dit que f présente un **extremum global** au point a, si l'inégalité est vrai pour tout $x \in S$.

Notation : $f|_S$ est la notation pour l'application restriction de f à S.

5.0.18 THÉORÈME (MÉTHODES DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE)
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $g : U \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_p(x))$ une application de classe C^r, $r \geq 1$. Posons $S = g^{-1}(0) = \{x \in U; g(x) = 0\}$. On suppose que, pour tout $x \in S$, $Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est surjective.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^r.

Alors, une condition nécessaire pour que la restriction de f à S présente un extrémum local en un point $a \in S$, est qu'il existe p nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (appelés les multiplicateurs de Lagrange) tels que :

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a).$$

En coordonnées ceci s'écrit : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a).$$

5.0.19 REMARQUE. Notons que pour chercher un extrema lié (c-à-d avec contrainte) nous aurons :

1) $n+p$ inconnues $\quad a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et

2) $n+p$ équations : $\begin{cases} g_1(a) = \ldots = g_p(a) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a), \qquad 1 \leq j \leq n \end{cases}$

Démonstration: $Dg(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ surjective est équivalent à dire que la matrice jacobienne de $J_g(a)$ est de rang p, on peut donc en extraire une matrice $p \times p$ de déterminant non nul, on peut supposer quitte renuméroter les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ que

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ n-p+1 \leq j \leq n}} \neq 0.$$

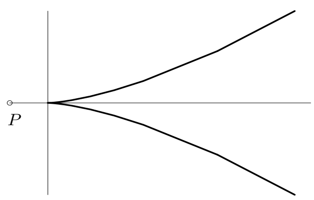
Alors, si l'on écrit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ et on note $x = (x_1, y_1)$ avec x_1 la variable dans $\mathbb{R}^{n-p}$ et y_1 la variable dans $\mathbb{R}^p$, on aura que $D_{y_1}g(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est une bijecion, on se ramène ainsi à la situation du théorème 5.0.24, ainsi il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ tel que

$$Df(a) = L \circ Dg(a)$$

c-à-d il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$Df(a) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \begin{pmatrix} Dg_1(a) \\ \vdots \\ Dg_p(a) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a).$$

5.0.21 REMARQUE. 1) Si la condition de surjectivité de la différentielle de g n'est pas satisfaite, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne permet pas de trouver des solutions, même si elles existent. par exemple, si $g(x, y) = y^2 - x^3$ et $f(x, y) = (x+1)^2 + y^2$ le carré de la distance au point $P = (-1, 0)$. 2)



On voit que le minimum de f restreint à $S = g^{-1}(0)$ est atteint au point $(0, 0) \in S$ et vaut 1, mais grad $f(0, 0) = (1, 0)$ et grad $g(0, 0) = (0, 0)$ montre qu'il n'est pas possible de trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que grad $f(0, 0) = \lambda$grad $g(0, 0)$.

2) (**Résultats liés à la compacité**)

5.0.22 THÉORÈME
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son maximum et minimum c-à-d il existe $a \in K$, $b \in K$ tels que : $f(a) = \max_{x \in K} f(x)$ et $f(b) = \min_{x \in K} f(x)$.

En effet, l'image d'un compact par une application continue est un compact, d'où $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc fermé borné dans $\mathbb{R}$, il contient alors ses bornes supérieure et inférieure.

5.0.23 EXEMPLE.

1. Soit $f(x,y) = xy$ et cherchons ses extréma sur le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$; on sait que ces extréma existent car $\mathbb{S}^1$ est compact. Cherchons d'abord les points critiques ; la méthode des multiplicateurs de Lagrange nous conduit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

Il y a donc 4 points critiques. $f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$ et $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$. Le maximum de f est $\frac{1}{2}$ et son minimum est $-\frac{1}{2}$.

2. Soit $f(x,y,z) = x + y + z$ et cherchons ses extréma sur l'ellipsoïde S d'équation $g(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$. On sait que f atteint ses extrema sur S, parceque c'est un compact de $\mathbb{R}^3$ (à justifier !) .
Comme grad $f(x,y,z) = (1,1,1)$ et grad $g(x,y,z) = (x, \frac{y}{2}, \frac{z}{3})$, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous ramène à la résolution du système suivant :
$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ 1 = \lambda \frac{y}{2} \\ 1 = \lambda \frac{z}{3} \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{x} \\ y = 2x \\ z = 3x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{4} + \frac{9x^2}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1).$$ Alors, $f(\sqrt{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)) = 2\sqrt{3}$ est le maximum de f et $f(-\sqrt{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)) = -2\sqrt{3}$ son minimum.

3. Si on remplace l'ellipsoïde par la surface, non compacte, V d'équation $h(x,y,z) = \frac{-x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$, le même calcul nous donne deux points critiques $a = -\sqrt{2}(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2})$ et $b = \sqrt{2}(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2})$.
Mais, f n'a pas d'extrémum sur V, en effet le long du chemin tracé sur V, défini par $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 2, t\sqrt{3}) \in V$, on a $f(\gamma(t)) = t(1 + \sqrt{3}) + 2$, prend ainsi des valeurs arbitrairement grandes et arbitrairement petites.

Le cas de la dimension infinie

Soient E_1 et E_2 des espaces de Banach, $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ des ouverts et $f : U \times V \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On note x la variable dans U et y la variable dans V.

5.0.24 THÉORÈME

Soit $S = \{(x, y) \in U \times V | g(x, y) = 0\}$ avec $g : U \times V \to F$ de classe C^1 et $(a, b) \in S$, où F est un espace de Banach.

On suppose que $D_y g(a, b) \in Isom(E_2, F)$. Si f présente un **extrémum sous la contrainte S** au point a alors :

il existe $L \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$, appelé multiplicateur de Lagrange, tel que

$$Df(a, b) = L \circ Dg(a, b).$$

Démonstration:

1. D'après le théorème des fonctions implicites 4.1.5 appliqué à g, l'ensemble S est localement le graphe d'une fonction de classe C^1, plus précisément, il existe des voisinages ouverts, $U_a \subset U$, $V_b \subset U$ et une fonction de classe C^1, $\varphi : U_a \to V_b$ tels que, $\varphi(a) = b$, $S \cap (U_a \times V_b) = \{(x, \varphi(x)) | x \in V_a\}$ et $D\varphi(a) = -\left(D_y g(a, b)\right)^{-1} \circ D_x g(a, b)$
2. On pose $h : U_a \to S$, $x \mapsto (x, \varphi(x))$.
La restriction de f à $S \cap (U_a \times V_b)$ est la fonction : $f \circ h : U_a \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, \varphi(x))$. La dérivation des fonctions composées nous donne
$$D(f \circ h)(a) = D_x f(a, b) + D_y f(a, b) \circ D\varphi(a).$$
3. Maintenant, la restriction de f à S présente un extrémum en (a, b) si et seulement si $f \circ h$ présente un extrémum en a. D'après la proposition**??**, on aura nécessairement $D(f \circ h)(a) = 0$, d'où $D_x f(a, b) = -D_y f(a, b) \circ D\varphi(a) = D_y f(a, b) \circ \left(D_y g(a, b)\right)^{-1} \circ D_x g(a, b)$, comme on toujours $D_y f(a, b) = D_y f(a, b) \circ Id_{E_2} = D_y f(a, b) \circ \left(D_y g(a, b)\right)^{-1} \circ D_y g(a, b)$, On obtient finalement :
$$Df(a, b) = L \circ Dg(a, b)$$
avec $L = D_y f(a, b) \circ \left(D_y g(a, b)\right)^{-1}$. ■

5.0.26 REMARQUE. On dit que l'application $h : U_a \to S$, $x \mapsto (x, \varphi(x))$, est une **paramétrisation locale** de S au voisinage de (a, b).

5.0.27 EXEMPLE (L'INÉGALITÉ ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE). Etant donnés n réels positifs, $a_1, \ldots, a_n$, on définit leur moyenne arithmétique par $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ et leurs moyenne géométrique par $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$. on alors

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

On va utiliser la méthode des multiplicateurs de lagrange pour démontrer cette inégalité.

Si l'un des $a_i = 0$, l'inégalité est vérifiée, on supposera pour la suite que les $a_i > 0$. En posant $A = \sum_{i=1}^n a_i$ et $x_i = \frac{a_i}{A}$, on aura $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, $x_i > 0$ et le problème revient à montrer $x_1 \dots x_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$. On a traduit le problème précédent en un problème d'extréma : Posons $U = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i > 0\}$, $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i - 1$ et $f(x) = x_1 \dots x_n$.

Il suffit donc de montrer que le maximum de la restriction de f à $S = g^{-1}(0)$ est égal à $\left(\frac{1}{n}\right)^n$.

Comme, $Dg(x) = (1, \dots, 1)$, $Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire surjective.

D'après, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, si un point $x \in S$ est un extrémum pour la restriction de f à S, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$Df(x) = \lambda Dg(x)$$

Donc, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $\prod_{j \neq i} x_i = \lambda$ ceci entraîne : $\lambda x_1 = \dots = \lambda x_n = \prod_{i=1}^n x_i$

Comme les $x_i \neq 0$, alors $\lambda \neq 0$ et $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$. D'où le maximum de la restriction de f à S est atteint au point $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ et vaut $\left(\frac{1}{n}\right)^n$.

5.0.28 Exercice (inégalité de Hölder) Soient p et q deux nombres réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient a_i et b_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, des nombres réels ≥ 0. alors

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Indication : On suppose $a_i \neq 0$. On pose $A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et et $x_i = \frac{a_i}{A}$. Alors $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$. On fixe, les b_i et on pose $B = \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. On est ramener alors à montrer que si $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^p - 1 = 0$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i \leq B$.

5.0.3 Annexe : une condition suffisante pour les extréma liés

Soient E_1 et E_2 des espaces de Banach, $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ des ouverts. On note x la variable dans U et y la variable dans V.

Soit $S = \{(x, y) \in U \times V | g(x, y) = 0\}$ avec $g : U \times V \to F$ de classe C^2 et $(a, b) \in S$ tel que $D_y g(a, b) \in Isom(E_2, F)$, où F est un espace de Banach.

Le théorème 5.0.24, nous donne une condition nécessaire pour qu'une application de classe C^2, $f : U \times V \to \mathbb{R}$, présente un **extrémum sous la contrainte S** au point a à savoir : il existe $L \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$,tel que $Df(a, b) = L \circ Dg(a, b)$.

Pour étudier la nature du point (a, b), c-à-d décider si c'est un extrémum local de $f|_S$, on peut appliquer l'étude faite pour le cas sans contrainte (voir le théorème 3.0.86), à la fonction $f \circ h$ où $h : U_a \to S$, $x \mapsto (x, \varphi(x))$, est une paramétrisation de S au voisinage de (a, b). (voir la démonstration du théorème 5.0.24 ou la remarque qui la suit).

Il faut donc examiner la forme bilinéaire $D^2(f \circ h)(a)$.
On a $D(f \circ h)(x)v = Df(h(x))Dh(x)v$ pour tout $x \in U_{a_1}$ et $v \in E_1$.
La différentielle seconde de $f \circ h$ est la forme bilinéaire :

$$D^2(f \circ h)(x)(v,w) = D^2f(h(x))(Dh(x)v, Dh(x)w) + Df(h(x))D^2h(x)(v,w)$$

pour tout $x \in U_{a_1}$ et $v, w \in E_1$.
On notera que $D^2h(x)(v,w) \in E_1 \times E_2$, d'où $Df(h(x))D^2h(x)(v,w) \in \mathbb{R}$. Comme $h(a) = (a,b)$ on a, pour tout $v, w \in E_1$. :

$$D^2(f \circ h)(a)(v,w) = D^2f(a,b)(Dh(a)v, Dh(a)w) + Df(a,b)D^2h(a)(v,w).$$

D'autre part, $g \circ h \equiv 0$, donc pour tout $x \in U_a$, $D(g \circ h)(x) = D(h(x))Dh(x) = 0$ et $D^2(g \circ h)(v,w) = D^2g(h(x))(Dh(x)v, Dh(x)w) + Dg(h(x))D^2h(x)(v,w) = 0$. Pour $x = a$, on a, pour tout $v, w \in E_1$.

$$D^2g(a,b)(Dh(a)v, Dh(a)w) = -Dg(a,b)D^2h(a)(v,w).$$

Comme (a,b) est un point critique de $f|_S$, il existe $L \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$,tel que $Df(a,b) = L \circ Dg(a,b)$, d'où

$$\begin{aligned} D^2(f \circ h)(a)(v,w) &= D^2f(a,b)(Dh(a)v, Dh(a)w) + L \circ Dg(a,b)D^2h(a)(v,w) \\ &= D^2f(a,b)(Dh(a)v, Dh(a)w) - L \circ Dg(a,b)(Dh(a)v, Dh(a)w). \end{aligned}$$

Finalement

$$D^2(f \circ h)(a)(v,w) = \left(D^2f(a,b) - L \circ D^2g(a,b)\right)(Dh(a)v, Dh(a)w)$$

pour tout $v, w \in E_1$.

5.0.29 Exercice Montrer que $ImDh(a) = KerDg(a,b)$.

Ceci nous amène à étudier la forme bilinéaire $D^2f(a,b) - L \circ D^2g(a,b)$ sur $KerDg(a,b)$.
On a donc

5.0.30 Théorème
On pose $B = D^2f(a,b) - L \circ D^2g(a,b)$, Si la restriction de B à $KerDg(a)$ est :
- définie positive, a est un minimum local de $f|_S$.
- définie négative, a est un maximum local de $f|_S$.

En dimension finie on aura

5.0.31 Théorème
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $g : U \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_p(x))$ une application de classe C^r, $r \geq 2$. On suppose que, pour tout $x \in U$, $Dg(x)$ est surjective. Posons $S = g^{-1}(0)$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^r.
Soit $a \in S$ tel que il existe $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ avec : $Df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i Dg_i(a)$.
On pose $Q(v) = D^2f(a)(v,v) - L \circ D^2g(a)(v,v)$.
Si la restriction de Q à $KerDg(a)$ est :

– définie positive c-à-d $Q(v) > 0$ pour tout $v \in KerDg(a) - \{0\}$, a est un minimum local de $f|_S$.
– définie négative c-à-d $Q(v) < 0$ pour tout $v \in KerDg(a) - \{0\}$), a est un maximum local de $f|_S$.

5.0.32 EXEMPLE. soient a, b et c trois nombres réels > 0. Déterminer le volume maximal d'un parallélogramme inscrit dans l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

On doit déterminer le maximum de la fonction $f : U \to \mathbb{R}, (x, ty, z) \mapsto 8xyz$, sur l'ensemble $S = g^{-1}(0)$ avec $g : U \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, où $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Soit $P = (x, y, z) \in S$ un extremum de $f|_S$, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous ramène à la résolution du système suivant :
$\begin{cases} 8yz = \frac{2\lambda x}{a^2} \\ 8xz = \frac{2\lambda y}{b^2} \\ 8xy = \frac{2\lambda z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 12xyz \\ x = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow P = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ et $\lambda = \frac{4abc}{\sqrt{3}}$. Maintenant, on doit montrer que $f|_S$ présente un maximum en $P = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$, on doit pour cela étudier la forme bilinéaire $D^2f(P) - \lambda D^2g(P)$, ceci revient à étudier la forme quadratique ; puisque $P = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ et $\lambda = -\frac{4abc}{\sqrt{3}}$ on a :

$$Q(v) = {}^t v \left(H_f(P) - \frac{4abc}{\sqrt{3}} H_g(P) \right) v$$

$$= (v_1, v_2, v_3) \left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{8c}{\sqrt{3}} & \frac{8b}{\sqrt{3}} \\ \frac{8c}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{8a}{\sqrt{3}} \\ \frac{8b}{\sqrt{3}} & \frac{8a}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} - \frac{4abc}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{c^2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{8abc}{\sqrt{3}} \left(\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2} + \frac{v_3^2}{c^2} \right) + \frac{16}{\sqrt{3}} (cv_1v_2 + bv_1v_3 + av_2v_3)$$

où $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in KerDg(P)$. D'autre part, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in KerDg(P) \Leftrightarrow J_g(p) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$ $(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{v_1}{a^2} + \frac{v_2}{b^2} + \frac{v_3}{c^2} = 0$. En utilisant cette dernière relation on trouve que la restriction de Q à $KerDg(p)$ à pour expression $Q(v) = -\frac{8abc}{\sqrt{3}} \left(\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2} + \frac{v_3^2}{c^2} \right)$ qui est bien définie négative, donc $f|_S$ présente un maximum au point $P = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ qui vaut $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.